

Lineare Gleichungen

Beispiel:

$$x + 5 = 5 + 4 + 3 + 3 + 2$$

$$x + 5 = 17 \quad | -5$$

$$x = 12 \Rightarrow L = \{12\}$$

Umformungsregel:

Addiert bzw. subtrahiert man auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl, so erhält man eine Gleichung mit derselben Lösungsmenge.

Gleichungen mit derselben Lösungsmenge heißen äquivalent.

Umformungen, die eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung überführen, heißen Äquivalenzumformungen.

Aufgaben:

1 $x - 7 = 13$ ☐

2 $2x + 5 = x + 17$ ☐

3 $3(x + 7) = 2x - 4$ ☐

4 $2(x + 3) - (3 - 2x) = (9x + 2) - (6x + 1)$ ☐

5 $2x + 8 = 2(x + 4)$ ☐

6 $17 - 3(4 - x) = 6 - 2(1 - x)$ ☐

7 $3(3 - 4x) = 4(1 - x) - (8x + 7)$ ☐

8 $G = \mathbb{N}$

$4x + 3(1 - x) = 2(3 - x) - (3 - 2x)$ ☐

9 $2x - 2(9x + 14) = 6 - 17(x + 2)$ ☐

10 $2 - 4(5 + x) = 2x - 6(3 + x)$ ☐

11 $2x - 4(x - 1) = 5x - 7(x + 1)$ ☐

12 $x - [6(3 - 2x) - 3(5 - x)] = 25 - 3(7 - x)$ ☒

13 $-31 - [5(x - 3) - 3(4 - x) - 4(2x + 1)] = 0$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad x - 7 = 13 \quad \Rightarrow x = 20 \quad \Rightarrow IL = \{20\}$$

$$2 \quad 2x + 5 = x + 17 \quad \Rightarrow x = 12 \quad \Rightarrow IL = \{12\}$$

$$3 \quad 3(x + 7) = 2x - 4 \quad \Rightarrow 3x + 21 = 2x - 4 \quad \Rightarrow x = -25 \quad \Rightarrow IL = \{-25\}$$

$$4 \quad 2(x + 3) - (3 - 2x) = (9x + 2) - (6x + 1)$$

$$2x + 6 - 3 + 2x = 9x + 2 - 6x - 1 \quad \Rightarrow 4x + 3 = 3x + 1 \quad \Rightarrow x = -2 \quad \Rightarrow IL = \{-2\}$$

$$5 \quad 2x + 8 = 2(x + 4) \quad \Rightarrow 2x + 8 = 2x + 8 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow IL = \mathbb{R}$$

Die Gleichung ist allgemeingültig

$$6 \quad 17 - 3(4 - x) = 6 - 2(1 - x)$$

$$17 - 12 + 3x = 6 - 2 + 2x \quad \Rightarrow 5 + 3x = 4 + 2x \quad \Rightarrow x = -1 \quad \Rightarrow IL = \{-1\}$$

$$7 \quad 3(3 - 4x) = 4(1 - x) - (8x + 7)$$

$$9 - 12x = 4 - 4x - 8x - 7 \quad \Rightarrow 9 - 12x = -3 - 12x \quad \Rightarrow 9 = -3 \quad \Rightarrow IL = \{ \}$$

Die Gleichung ist unerfüllbar

$$8 \quad G = \mathbb{N}$$

$$4x + 3(1 - x) = 2(3 - x) - (3 - 2x)$$

$$4x + 3 - 3x = 6 - 2x - 3 + 2x \quad \Rightarrow x + 3 = 3 \quad \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow IL = \{ \}$$

$$9 \quad 2x - 2(9x + 14) = 6 - 17(x + 2)$$

$$2x - 18x - 28 = 6 - 17x - 34 \quad \Rightarrow -16x - 28 = -17x - 28 \quad \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow IL = \{0\}$$

$$10 \quad 2 - 4(5 + x) = 2x - 6(3 + x)$$

$$2 - 20 - 4x = 2x - 18 - 6x \quad \Rightarrow -4x - 18 = -4x - 18 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow IL = \mathbb{R}$$

$$11 \quad 2x - 4(x - 1) = 5x - 7(x + 1)$$

$$2x - 4x + 4 = 5x - 7x - 7 \quad \Rightarrow -2x + 4 = -2x - 7 \quad \Rightarrow 4 = -7 \quad \Rightarrow IL = \{ \}$$

$$12 \quad x - [6(3 - 2x) - 3(5 - x)] = 25 - 3(7 - x)$$

$$x - [18 - 12x - 15 + 3x] = 25 - 21 + 3x$$

$$x - [3 - 9x] = 4 + 3x \quad \Rightarrow x - 3 + 9x = 4 + 3x \quad \Rightarrow 7x = 7 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow IL = \{1\}$$

$$13 \quad -31 - [5(x - 3) - 3(4 - x) - 4(2x + 1)] = 0$$

$$-31 - [5x - 15 - 12 + 3x - 8x - 4] = 0$$

$$-31 - [-31] = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow IL = \mathbb{R}$$

Äquivalenzumformungen durch Multiplikation und Division

Beispiele:

1 $2x = 6 \quad | :2$

$$x = 3 \Rightarrow IL = \{3\}$$

2 $\frac{1}{2}x = 5 \quad | \cdot 2$

$$x = 10 \Rightarrow IL = \{10\}$$

Umformungsregel:

Man erhält eine zu einer Gleichung äquivalente Gleichung, wenn man

1. auf beiden Seiten dieselbe Zahl bzw. das gleiche Vielfache der Variablen addiert bzw. subtrahiert.
2. beide Seiten mit derselben von Null verschiedenen Zahl multipliziert.
3. beide Seiten durch dieselbe von Null verschiedene Zahl dividiert.

Aufgaben:

- 1 $-3x = 21$ ○
- 2 $3(x+4) = 18$ ○
- 3 $4 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$ ○
- 4 $14 + 2(4x-1) = 6(x+2) + 1$ ○
- 5 $\frac{1}{2}(x+3) - \frac{3}{5}(x-4) = \frac{5}{2}(x-7) - 2$ ○
- 6 $\frac{1}{2}(4x + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}(9x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(12x + 1)$ ○
- 7 $(0,3 - 1,6x) + (1,2x - 2,3) = 0,7x - (1,9 - 1,8x)$ ☒
- 8 $5x = 49 - (6x + 16)$ ○
- 9 $29 - (17 - 2x) = 8x + (12 - 3x)$ ○
- 10 $\frac{9}{4}(\frac{3}{2}x - \frac{11}{3}) - \frac{5}{6}(\frac{7}{4} + x) = \frac{7}{2}x - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})$ ☒
- 11 $2 \cdot [3(4x-3) + 4(2-3x)] = -[3(5x+2) - 4(3x-5)]$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad -3x = 21 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow IL = \{-7\}$$

$$2 \quad 3(x+4) = 18 \Rightarrow 3x+12 = 18 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow IL = \{2\}$$

$$3 \quad 4 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{24}{5} = \frac{8}{15}x \Rightarrow x = 9 \Rightarrow IL = \{9\}$$

$$4 \quad 14 + 2(4x-1) = 6(x+2) + 1$$

$$14 + 8x - 2 = 6x + 12 + 1 \Rightarrow 8x + 12 = 6x + 13 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow IL = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$5 \quad \frac{1}{2}(x+3) - \frac{3}{5}(x-4) = \frac{5}{2}(x-7) - 2$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{3}{5}x + \frac{12}{5} = \frac{5}{2}x - \frac{35}{2} - 2 \Rightarrow -\frac{1}{10}x + \frac{39}{10} = \frac{5}{2}x - \frac{39}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{234}{10} = \frac{26}{10}x \Rightarrow x = 9 \quad IL = \{9\}$$

$$6 \quad \frac{1}{2}(4x + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}(9x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(12x + 1)$$

$$2x + \frac{1}{6} - 3x + \frac{1}{12} = 3x + \frac{1}{4} \Rightarrow -x + \frac{1}{4} = 3x + \frac{1}{4} \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow IL = \{0\}$$

$$7 \quad (0,3 - 1,6x) + (1,2x - 2,3) = 0,7x - (1,9 - 1,8x)$$

$$0,3 - 1,6x + 1,2x - 2,3 = 0,7x - 1,9 + 1,8x \Rightarrow -0,4x - 2 = 2,5x - 1,9$$

$$2,9x = -0,1 \Rightarrow x = -\frac{1}{29} \Rightarrow IL = \left\{-\frac{1}{29}\right\}$$

$$8 \quad 5x = 49 - (6x + 16) \Rightarrow 5x = 49 - 6x - 16 \Rightarrow 5x = 33 - 6x$$

$$11x = 33 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow IL = \{3\}$$

$$9 \quad 29 - (17 - 2x) = 8x + (12 - 3x)$$

$$29 - 17 + 2x = 8x + 12 - 3x \Rightarrow 2x + 12 = 5x + 12 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow IL = \{0\}$$

$$10 \quad \frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}x - \frac{11}{3}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{7}{4} + x\right) = \frac{7}{2}x - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{27}{8}x - \frac{99}{12} - \frac{35}{24} - \frac{5}{6}x = \frac{7}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{61}{24}x - \frac{233}{24} = \frac{19}{6}x + \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{15}{24}x = \frac{245}{24} \Rightarrow x = -\frac{49}{3} \Rightarrow IL = \left\{-\frac{49}{3}\right\}$$

$$11 \quad 2 \cdot [3(4x - 3) + 4(2 - 3x)] = -[3(5x + 2) - 4(3x - 5)]$$

$$2 \cdot [12x - 9 + 8 - 12x] = -[15x + 6 - 12x + 20]$$

$$2 \cdot (-1) = -(3x + 26) \Rightarrow -2 = -3x - 26 \Rightarrow 3x = -24 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow IL = \{-8\}$$